一次元非線形Schrodinger方程式のCauchy問題の解について(非線形発展方程式の理論と応用)

堤, 正義; 仲光, 邦昭; 林, 仲夫

数理解析研究所講究録
579巻 1985年 101-119

一次元非線形Schrödinger方程式の Cauchy 問題の解について

早大理工　堤　正義　(Masayoshi Tsutsumi)
早大理工　仲光　邦昭 (Kuniaki Nakamitsu)
早大理工　林　仲夫　(Nakao Hayashi)

1. Introduction.　我々は次の非線形Schrödinger方程式の Cauchy 問題を考えることにする。

$$(1.1) \qquad i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda |u|^{p-1}u, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},$$

$$(1.2) \qquad u(0,x) = \phi(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

我々の目的は $\lambda > 0$, $p > 1$ が奇数, $\phi \in H^1(\mathbb{R})$ であれば $|x| \to \infty$ のとき ϕ が十分速く減少しているという条件のもとで (1.1), (1.2) の解が $t \neq 0$ でなめらかになるということ、すなわち、非線形放物形方程式の解のもつ smoothing effect や、T. Kato [7] によって示された KdV 方程式の解の smoothing effect と類似の性質を (1.1), (1.2) の解が持つことを示すことにある。我々は上記のことを次の2つの事実をもちいることで示すことが出来る。

1. 方程式 (1.1) は次の2つの保存量をもつ。

$$E_0(t) = \int |u(t,x)|^2 dx,$$

$$E_1(t) = \frac{1}{2}\int |Du(t,x)|^2 dx + \frac{\lambda}{p+1}\int |u(t,x)|^{p+1} dx.$$

2. 作用素 $J \triangleq e^{ix^2/4t}(2it)D(e^{-ix^2/4t})$ が Schrödinger 作用素 $L = i\partial/\partial t + \partial^2/\partial x^2$ と交換可能である。すなわち

$$LJ = JL.$$

ここで $D = \partial/\partial x$ である。

注) 初期値 $\phi \in H^1(\mathbb{R})$ という条件を $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ という条件に変えても $p=3$ であれば、ある程度同様の結果が得られる。その場合は1の事実は必要としない。(くわしくは論文 [4] を参照.)

以下この論説で用いる記号の説明及び有用な補題を述べることにする。

$n \in \mathbb{N}$ (自然数), $1 \leq p \leq \infty$ とし $[s]$ を s をこえないが s に等しい最小の整数をあらわすことにする。$L^p = L^p(\mathbb{R})$, $H^{n,p} = H^{n,p}(\mathbb{R})$ をそれぞれ次の norm を持った通常の Sobolev 空間とする。

$$|f|_p = \left(\int |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad 1\leq p<\infty,$$

$$|f|_\infty = \operatorname*{ess.sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, \quad p=\infty,$$

$$|f|_{n,p} = \sum_{j=0}^{n} |D^j f|_p$$

$\mathbb{R}$の区間Iと$|\cdot|_B$なるnormを持ったBanach空間Bに対して$C(I,B)$（あるいは$C_b(I,B)$）によってIからBへの連続関数（あるいは有界連続関数）の空間を表わす。$C^l(I,B)$（あるいは$C_b^l(I,B)$）をIからBへのl回連続微分可能（あるいはl回有界連続微分可能）な空間とする。簡単のために$H^{m,2}$をH^mであらわすことにする。又$C(a,b,\cdots)$によって、$a,b,\cdots$に依存した定数をあらわすことにし、とくに$a,b,\cdots$を明示する必要がないときはCで表わすことにする。

次のGagliardo-Nirenbergの不等式（以下簡単のためG-Nの不等式とする。）は$J^m(|u|^{p-1}u)$の評価を行なうときに有用である。

<u>補題 1.</u> $1\leq q,r\leq\infty$, $j,m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$かつ$j\leq m$とする。そのとき次の不等式が成立する。

(1.3) $$|D^j u|_p \leq M |D^m u|_r^a |u|_q^{1-a},$$

ここで $1/p = j + a((1/r) - m) + (1-a)/q$ で
aは次の不等式を満足するものとする。

(1.4) $$j/m \leqq a \leqq 1$$

なお(1.3)におけるMはm, j, q, r, aにのみ依存した定数である。

証明は Friedman [1] 参照.

2. H^1-solutions.

最初に我々の得た結果を述べることにする。

定理 1. $\lambda > 0$ のとき $1 < p < \infty$, $\lambda < 0$ のとき $1 < p < 5$。$\phi \in H^1$, $x^n \phi \in L^2$ $(n \in \mathbb{N})$ とし, もしpが奇数でなければ $p > n+1$ とする。以上の仮定のもと, (1.1), (1.2)の解 $u = u(t, x)$ が一意的に存在し次の性質を満足する。

(2.1) $$u \in C_b(\mathbb{R}; H^1)$$

(2.2) $$J^m u \in C(\mathbb{R}; L^2), \quad m = 1, 2, \cdots, n$$

(2.3) $$|u(t)|_2 = |\phi|_2$$

(2.4) $$|Du(t)|_2^2 + \frac{2\lambda}{p+1}|u(t)|_{p+1}^{p+1} = |D\phi|_2^2 + \frac{2\lambda}{p+1}|\phi|_{p+1}^{p+1}$$

$$(2.5) \qquad \|Ju(t)\|_2^2 + \frac{8t^2\lambda}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1} = \|x\phi\|_2^2 + \frac{4\lambda(5-p)}{p+1}\int_0^t \tau \|u(\tau)\|_{p+1}^{p+1} d\tau$$

さらに次の不等式を満足する。

$$(2.6) \qquad \|J^m u(t)\|_2^2 \leqq C_m \eta_m(t), \quad m=1,2,\cdots,n$$

ここで C_m は $p, \lambda, m, \|\phi\|_{1,2}, \|x^m\phi\|_2$ にのみ依存する定数である。又 $\eta_m(t)$ は次のとおりである。

$\lambda>0, \quad p>(3+\sqrt{17})/2$ のとき $\eta_m(t)=1$

$\lambda>0, \quad p=(3+\sqrt{17})/2$ のとき $\eta_m(t)=(1+|t|)^{C_m}$

$\lambda>0, \quad 1<p<(3+\sqrt{17})/2$ のとき $\eta_m(t)=\exp[C_m(1+|t|)^{1-\frac{(p-1)^2}{p+3}}]$

$\lambda<0, \quad 1<p<5$ のとき $\eta_m(t)=\exp[C_m(1+|t|)]$

<u>注1.1</u> $\quad J^m u = e^{ix^2/4t}(2it)^m D^m(e^{-ix^2/4t}u)$ であるから (2.2) より

$$e^{-ix^2/4t}u \in C(\mathbb{R}\setminus\{0\}; H^m) \quad .$$

<u>系1.1.</u> $\quad$ 定理1の仮定の下 (1.1), (1.2) の解 u は

$$u \in \bigcap_{m=0}^{[n/2]} C^m(\mathbb{R}\setminus\{0\}; C^{n-2m-1}(\mathbb{R}))$$

を満足する。

系 1.2. 定理1において p を奇数とし，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $x^n\phi\in L^2$ とすれば (1.1), (1.2) の解は $t\neq 0$ で t と x に関して無限回微分可能である。

注 1.2. 多次元に関する類似の結果については論文 [5] 参照。

以下定理1の証明をすることにする。

定理1の証明. $t>0$ だけを扱うことにする。(なぜなら $t<0$ は同様に扱うことが出来るから。) 以下我々は (1.1), (1.2) に対する次の近似方程式を考えることにする。

$$(2.7)\qquad iu_t + D^2u = \lambda f_k(|u|^2)u,\quad (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

$$(2.8)\qquad u(0,x) = \phi_k(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

ここで p が奇数のとき $f_k(s)=s^{(p-1)/2}$，p が奇数でないとき $f_k(s)=s^{(p-1)/2}\exp(-s^{-\delta/2}/k)$，$\delta>0$ とし $\phi_k(x)\in\mathcal{S}$ (急減少関数) の要素で $\phi_k\to\phi$ in H^1 $x^n\phi_k\to x^n\phi$ in L^2 as $k\to\infty$ とする。
M. Tsutsumi [8] によっておのおのの k に対して

(2.7), (2.8) の一意的な解 $u_k = u_k(t, x)$ が存在して $u_k \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ が示されているので、我々は定理1の結果を得るために必要な a-priori 評価を (2.7), (2.8) の解に対して示せばよい。

補題 2.1. u_k を (2.7), (2.8) の解とすると次の評価式を得ることが出来る。

$$(2.9) \qquad |u_k(t)|_2 = |\phi_k|_2$$

$$(2.10) \qquad |Du_k(t)|_2^2 + \lambda \int G_k(|u_k(t,x)|^2)\,dx = |D\phi_k|_2^2 + \lambda \int G_k(|\phi_k|^2)\,dx$$

$$(2.11) \qquad |Ju_k(t)|_2^2 + 4t^2\lambda \int G_k(|u_k(t,x)|^2)\,dx = |x\phi_k|_2^2 + 4\lambda \int_0^t s \int H_k(|u_k(s,x)|^2)\,ds\,dx$$

ここで $G_k(s) = \int_0^s f_k(\sigma)\,d\sigma$, $H_k(s) = 3G_k(s) - f_k(s)s$ である。

証明 (2.9), (2.10) は (2.7) の両辺に $\overline{u_k}$ 及び $\overline{(u_k)_t}$ をかけて部分積分を行なうことによって得られる。又 (2.11) は Ginibre-Velo [2] によって得られた pseudoconformal law である。 Q.E.D.

以下 u_k は (2.7), (2.8) の解とする。

補題 2.2. u_k は次の不等式を満足する。

(2.12) $$|u_k(t)|_{1,2} \leqq C,$$

さらにもし $\lambda > 0$ ならば

(2.13) $$|u_k(t)|_\infty \leqq C(1+t)^{-\sigma}, \quad t > 0$$

ここで C は k, t に依存しない定数である。又 $\sigma = \min\{1/2, (p-1)/(p+3)\}$。

証明 (2.12) は (2.9), (2.10) よりあきらか。$p \geqq 5$, $\lambda > 0$ のとき (2.11) より

$$|Ju_k(t)|_2 \leqq C,$$

よって G-N の不等式 及び (2.12) より

$$|u_k(t)|_\infty \leqq Ct^{-1/2}|Ju_k(t)|_2^{1/2}|u_k(t)|_2^{1/2} \leqq Ct^{-1/2},$$

又 (2.12) より $|u_k(t)|_\infty \leqq C$ であるから (2.13) が得られる。次に $1 < p < 5$, $\lambda > 0$ を考える。(2.11) より次の不等式が得られる。

$$t^2|u_k(t)|_{p+1}^{p+1} \leqq \frac{p+1}{8}|x\phi_k|_2^2 + \frac{5-p}{2}\int_0^t s|u_k(s)|_{p+1}^{p+1}ds$$

Kadekawa [6] により

(2.14) $\quad |u_k(t)|_{p+1} \leqq C t^{-(p-1)/2(p+1)}, \quad t>1$

これと (2.11) より

(2.15) $\quad |Ju_k(t)|_2 \leqq C t^{1-\frac{1}{4}(p-1)}, \quad t>1$

G-Nの不等式より

$$|u_k(t)|_\infty \leqq C t^{-\frac{2}{p+3}} |Ju_k(t)|_2^{\frac{2}{p+3}} |u_k(t)|_{p+1}^{\frac{p+1}{p+3}}$$

これと (2.14), (2.15) より

$$|u_k(t)|_\infty \leqq C t^{-(p-1)/(p+3)}, \quad t>1$$

以上より補題は示された。 Q.E.D.

補題 2.3. u_k は次の不等式を満足する。

(2.16) $\quad |J^m u_k(t)|_2 \leqq C_m \eta_m(t), \quad m=1,2,\cdots,n,$

ここで $\eta_m(t)$ は定理1にあるものと同じである。又 C_m は p, λ, m, $|\phi|_{1,2}$, $|x^m\phi|_2$ にのみ依存した定数で k, t には依存していない。

証明. J と L が交換可能であるから $J^m u_k = w_{m,k}$ とおくと $w_{m,k}$ は次の方程式を満足する。

(2.17) $\quad i(w_{m,k})_t + D^2 w_{m,k} = \lambda J^m(f_k(|u_k|^2)u_k)$

(2.18) $\quad w_{m,k}(0) = x^m \phi_k, \quad m=1,2,\cdots,n.$

$\lambda<0$ のときも $\lambda>0$ のときと同様に扱うことが出来るので $\lambda>0$ だけを考えることにする。(2.17) に $\overline{w_{m,k}}$ をかけて

xに関して部分積分をし虚数部をとれば次の式を得ることが出来る。

(2.19) $$\frac{d}{dt}|w_{m,k}(t)|_2^2$$
$$= 2\lambda \,\mathrm{Im}\int [J^m(f_k(|u_k(t,x)|^2)u_k(t,x)]\,\overline{w_{m,k}}(t,x)\,dx$$
$$\leqq C\,|(2tD)^m f_k(|v_k(t)|^2)v_k(t)|_2\,|w_{m,k}(t)|_2$$

ここで $v_k = e^{-ix^2/4t}u_k$ である。 G-Nの不等式より
$$|(2tD)^m f_k(|v_k|^2)v_k|_2 \leqq C_m\,|v_k|_\infty^{p-1}\,|w_{m,k}|_2$$
$$\leqq C_m\,|u_k|_\infty^{p-1}\,|w_{m,k}|_2$$

上の式と (2.19), 及び (2.13) より

(2.20) $$\frac{d}{dt}|w_{m,k}(t)|_2^2 \leqq C_m(1+t)^{-\sigma(p-1)}|w_{m,k}(t)|_2^2$$

これより $\sigma(p-1)>1$ ならば
$$|w_{m,k}(t)|_2^2 \leqq C_m,$$
$\sigma(p-1)=1$ ならば
$$|w_{m,k}(t)|_2^2 \leqq C_m(1+t)^{C_m},$$
$0<\sigma(p-1)<1$ ならば
$$|w_{m,k}(t)|_2^2 \leqq C_m \exp[C_m(1+t)^{1-\sigma(p-1)}],$$
以上より (2.16)がいえたことになる。 Q.E.D.

次に$w_{m,k}$の収束について考えることにする。

<u>補題 2.4.</u>　$p>2$とする。そのとき任意の$T>0$に対して$\{u_k\}$は次の不等式を満足する。

(2.21)　$$|u_k(t)-u_j(t)|_{1,2}^2 \leqq C(T)\{|\phi_k-\phi_j|_{1,2}^2 + A_p^2(1/k+1/j)^2\}$$

ここで$C(T)$はk, jに依存しない定数，A_pはpが奇数のとき0，pが奇数でないとき1とする。

<u>証明.</u>　$v_{k,j}=u_j-u_k$とする。方程式(2.7)より次の式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|v_{k,j}(t)|_{1,2}^2 &= 2\lambda\,\mathrm{Im}\int[f_k(|u_k|^2)u_k - f_j(|u_j|^2)u_j]\overline{v}_{k,j}\,dx \\ &\quad + 2\lambda\,\mathrm{Im}\int[D(f_k(|u_k|^2)u_k - f_j(|u_j|^2)u_j]D\overline{v}_{k,j}\,dx \\ &\leqq C(|u_k|_\infty^{p-1}+|u_j|_\infty^{p-1})|v_{k,j}|_2^2 \\ &\quad + CA_p(1/k+1/j)(|u_k|_\infty^{p-1-\delta}+|u_j|_\infty^{p-1-\delta}) \\ &\qquad \times(|u_k|_{1,2}+|u_j|_{1,2})(|v_{k,j}|_2+|Dv_{k,j}|_2) \\ &\quad + C(|u_k|_\infty^{p-2}+|u_j|_\infty^{p-2})(|Du_k|_2+|Du_j|_2) \\ &\qquad \times(|v_{k,j}|_\infty|Dv_{k,j}|_2+|Dv_{k,j}|_2^2)\end{aligned}$$

//

(2.12) より

$$\frac{d}{dt}|U_{k,j}(t)|_{1,2}^2 \leqq C|U_{k,j}(t)|_{1,2}^2 + CA_p^2(1/k+1/j)^2$$

これより (2.21) は容易に得られる.　　　　　　　Q.E.D.

補題 2.5.　pが奇数でないとき $p>n+1$ とする。そのとき任意の $T>0$ に対し $w_{m,k}$ は次の不等式を満足する。

(2.22)　$$|w_{m,k}(t)-w_{m,j}(t)|_2^2$$
$$\leqq C(T)[|J^m(\phi_k-\phi_j)|_2^2+|\phi_k-\phi_j|_{1,2}^2+A_p^2(1/k+1/j)^2].$$

ここで $C(T)$ は k,j に依存しない定数 A_p は pが奇数のとき 0, pが奇数でないとき 1 とする。

証明.　$W_{k,j}=w_{m,k}-w_{m,j}$ とする。方程式 (2.17) より我々は次の不等式を得る。

$$i(W_{k,j})_t + D^2W_{k,j}$$
$$=\lambda J^m(f_k(|u_k|^2)u_k - f_j(|u_j|^2)u_j).$$

$\overline{W}_{k,j}$ を両辺にかけて、xに関して積分し、虚数部分をとると次の不等式が得られる。

$$\frac{d}{dt}|W_{k,j}(t)|_2^2 \leqq C\,|(2tD)^m(f_k(|v_k|^2)v_k - f_j(|v_j|^2)v_j)|_2 \times |W_{k,j}(t)|_2 .$$

ところで

$$(2.23)\quad |(2tD)^m(f_k(|v_k|^2)v_k - f_j(|v_j|^2)v_j)|_2$$
$$\leqq |(2tD)^m(f_k(|v_k|^2)v_k - f_j(|v_k|^2)v_k)|_2$$
$$+ |(2tD)^m(f_j(|v_k|^2)v_k - f_j(|v_j|^2)v_j)|_2$$

(2.23) の才一項は次の式によって上から評価される。

$$C A_p\,[(1/k)\,|u_k|_\infty^{p-1-\delta} + (1/j)\,|u_k|_\infty^{p-1-\delta}]\,|w_{m,k}|_2$$
$$\leqq C(T)\,A_p\,(1/k + 1/j) .$$

ここで補題2.2，補題2.3を用いた。 (2.23) の才二項はG－Nの不等式を用いることにより次の式によって上から評価される。

$$C\,(|w_{m,k}|_2^{p-1} + |w_{m,j}|_2^{p-1} + |u_k|_\infty^{p-1} + |u_j|_\infty^{p-1})$$
$$\times \sum_{l=1}^{m} |V_{k,j}|_\infty^{1-\alpha_l}\,|W_{k,j}|_2^{\alpha_l}$$

ここで α_l は $0 \leqq \alpha_l \leqq 1$ を満足する実数である。補題2.2，補題2.4と以上の計算により我々は次の不等式を得ることが出来る。

$$\frac{d}{dt}|W_{k,j}(t)|_2^2 \leqq C(T)\{A_p^2(1/k+1/j)^2+|\phi_k-\phi_j|_{1,2}^2+|W_{k,j}(t)|_2^2\}$$

これより (2.22) は容易に得られる。　　　　　　Q.E.D.

補題 2.4, 2.5 を用いることにより以下定理1を証明することにする。補題 2.4 より (2.1), (2.2) を満足する u が一意的に決まることはあきらか、又それが (1.1) の解であることは容易にわかる。u が性質 (2.3)−(2.6) を満足することは補題 2.1−2.3 より得られる。　　　　　　Q.E.D.

最後に系 1.1 の証明を与えることにする。

<u>系 1.1 の証明</u>　　注 1.1 より $e^{-ix^2/4t}u \in C(R\setminus\{0\}; H^n(R))$ Sobolev の不等式より $e^{-ix^2/4t}u \in C(R\setminus\{0\}; C^{n-1}(R))$ よって　$u \in C(R\setminus\{0\}; C^{n-1}(R))$. 方程式 (1.1) を用いれば次の結果が得られる。

$$u \in \bigcap_{m=0}^{[n/2]} C^m(R\setminus\{0\}; C^{n-2m-1}(R))$$

次に L^2-solutions について考える。

3. L^2-solutions　最初にこの章で用いる記号及び補題について述べることにする。$\mathbb{R}$の区間Iに対して$L^p(I;B)$でI上で定義されたBanach空間Bに値をとる強可測関数$u(t)$で$|u(t)|_B \in L^p(I)$を満足する関数空間を表わすことにする。$\mathcal{F}$をFourier変換，$\mathcal{F}^{-1}$を逆Fourier変換とし$U(t)$を次のように定義することにする。

$$U(t)\phi = \mathcal{F}^{-1} e^{-i|\xi|^2 t} \mathcal{F}\phi$$

$U(t)\phi$に関する補題はこの章の結果を得るために重要である。

補題 3.1. 任意の$\phi \in L^{p'}$に対して

$$|U(t)\phi|_p \leqq C|t|^{-(p-2)/2p} |\phi|_{p'}$$

ここで$2 \leqq p \leqq \infty$, $1/p + 1/p' = 1$.

補題 3.2. 任意の$\phi \in L^2$に対して

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |U(t)\phi|_r^q \, dt\right)^{1/q} \leqq C|\phi|_2$$

ここで$2 \leqq r \leqq \infty$, $2/q = 1/2 - 1/r$.

補題 3.2 の証明については [3], [10] 参照。

次に我々の結果を述べることにする。

定理 2. $1<p<5$, $\phi\in L^2$, $x^n\phi\in L^2$ $(n\in\mathbb{N})$ とし, $p\neq 3$ ならば $p>n+1$ とする。そのとき (1.1), (1.2) の一意的な解 $u=u(t,x)$ が存在し, 次の性質を満足する.

$$(3.1)\qquad u\in C_b(\mathbb{R};L^2)$$

$$(3.2)\qquad J^m u\in L^q_{loc}(\mathbb{R};L^{p+1})\cap C(\mathbb{R};L^2)$$

$$m=0,1,2,\cdots,n,$$

ここで $q=4(p+1)/(p-1)$.

証明 第2章の H^1-solutions のときと同様に補題3.1, 3.2 及び G-N の不等式を用いることにより我々は近似方程式 (2.7)-(2.8) の解 u_k に対して次の不等式を得ることが出来る。任意の $T>0$, 及び $m=0,1,2,\cdots,n$ に対して

$$(3.3)\qquad \left(\int_0^T |J^m u_k(t)|_{p+1}^q\,dt\right)^{1/q}\leqq C(T)$$

$$(3.4)\qquad \sup_{0\leqq t\leqq T}|J^m u_k(t)|_2\leqq C(T)$$

ここで $C(T)$ は k に依存しない定数である。次に補題3.1, 3.2, 及び (3.3), (3.4) 式と G-N の不等式を用いると次の不等式が得られる。

任意の $T>0$ と, $m=0,1,2,\cdots,n$ に対して

(3.5) $$\left(\int_0^T |J^m(u_k(t)-u_j(t))|_{p+1}^q dt\right)^{1/q}$$

$$\leqq C(T)\left(A_p(1/k+1/j)+|\phi_k-\phi_j|_2+|x^m(\phi_k-\phi_j)|_2\right).$$

(3.6) $$\sup_{0\leqq t\leqq T} |J^m(u_k(t)-u_j(t))|_2$$

$$\leqq C(T)\left(A_p(1/k+1/j)+|\phi_k-\phi_j|_2+|x^m(\phi_k-\phi_j)|_2\right)$$

ここで $C(T)$ は k,j に依存しない定数及び A_p は $p=3$ のとき 0, $p\neq 3$ のとき $A_p=1$ である。不等式 (3.3)-(3.6) に関するくわしい証明については [4] 参照。
定理1の議論と同様にして定理2は不等式 (3.5), (3.6) より得られる。 Q.E.D.

系1.1 と同様にして次の系2.1が定理2より得られる。

<u>系2.1.</u> 定理2の仮定の下 (1.1), (1.2) の解 u は

$$u\in\bigcap_{m=0}^{[n/2]} C^m(\mathbb{R}\setminus\{0\};C^{n-2m-1}(\mathbb{R}))$$

を満足する。

References

[1] A. Friedman : Partial Differential Equations : Holt-Rinehart and Winston New-York, 1969.

[2] J. Ginibre and G. Velo : On a class of nonlinear Schrödinger equation I, II, J. Functional Analysis, 32 (1979), 1-32, 33-71 ; III, Ann. Inst. Henri Poincare Sect. A, 28 (1978), 287-316.

[3] J. Ginibre and G. Velo : Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations, Preprint (1984).

[4] N. Hayashi, K. Nakamitsu and M. Tsutsumi : On solutions of the initial value problem for the nonlinear Schrödinger equations in one space dimension, to appear (1985).

[5] N. Hayashi, K. Nakamitsu and M. Tsutsumi : On solutions of the initial value problem for the nonlinear Schrödinger equations, submitted (1985).

[6] S. Kadekawa : Ph. D. Thesis, Indiana University, (1980).

[7] T. Kato : On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg - de Vries equations, in "Studies in applied mathematics", edited by V. Gullemin, advances in mathematics supplementary studies, Vol. 8, Academic press, (1983), 93-128.

[8] M. Tsutsumi : Weighted Sobolev spaces and rapidly decreasing solutions of some nonlinear dispersive wave equations, J. Differential Equations, 42 (1981), 260-281.

[9] Y. Tsutsumi : Scattering problem for nonlinear Schrödinger equations, to appear (1985)

[10] Y. Tsutsumi : L^2-solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups, preprint, (1985)

[11] V. E. Zakharov and A. B. Shabat : Exact theory of two dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, Sov. Phys. JETP. 34 (1972), 62-69.